Sesión de resolución de problemas (enunciados)

19/02/2021

Selección de problemas de la segunda ronda de la Olimpiada de Matemáticas de Irán

Ejercicio 1 (2016.4). *Tenemos n rectas $r_1, r_2, \ldots, r_n$ en el plano de forma que no hay dos paralelas, y no hay tres que pasen por el mismo punto. Un punto de corte entre dos rectas se dice interior si hay al menos otro punto de corte a cada lado de cada una de las dos rectas. Prueba que hay al menos $(n-2)(n-3)/2$ puntos interiores.*

Ejercicio 2 (2019.1). *Tenemos un rectángulo cuyos lados son espejos. Un rayo de luz entra por una esquina, y después de ser reflejado varias veces sale por la esquina opuesta a la que entró. Prueba que en algún momento el rayo pasa por el centro del rectángulo.*

Ejercicio 3 (2019.5). *Ali y Naqui juegan a un juego. Se empieza con el polinomio $P(x) = 1 + x^{1398}$. Naqui empieza y elige un número natural n tal que $0 \leq n \leq 1398$ y suma al polinomio P el término x^n. Después Ali hace lo mismo. Si después de jugar Ali existe algún punto $t \in \mathbb{R}$ con $P(t) < 0$, Ali pierde el juego. Demuestra que Ali puede jugar eternamente sin perder.*

Ejercicio 4 (2020.2). *Sean x, y, z números reales positivos tales que $x + y + z = 1399$. Encuentra el valor máximo de $\lfloor x \rfloor y + \lfloor y \rfloor z + \lfloor z \rfloor x$. Aclaración: $\lfloor a \rfloor$ denota la parte entera de a, es decir, el mayor entero menor o igual que a.*

Ejercicio 5 (2018.2). *Sea n un número natural impar y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales distintos. Probar que el conjunto $X = \{|x_i - x_j| : i < j\}$ se puede dividir en dos subconjuntos de forma que la suma de sus elementos coincida.*

Ejercicio 6 (2018.3). *Sean a, k números naturales tales que $a > k$. Sean $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ y y $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ sucesiones de números naturales tales que*

$$(a^{r_1} + k)(a^{r_2} + k) \ldots (a^{r_n} + k) = (a^{s_1} + k)(a^{s_2} + k) \ldots (a^{s_n} + k).$$

Prueba que las sucesiones son iguales.

Ejercicio 7 (2018.4). *Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*

$$f(x+y)f(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$$

para cualesquiera x, y reales.

Ejercicio 8 (2019.2). *ABC es un triángulo isósceles con $AB = AC$. X es un punto arbitrario de BC, y los puntos $Y \in AB$ y $Z \in AC$ satisfacen $\angle BXY = \angle ZXC$. La recta paralela a YZ que pasa por B corta a la recta XZ en T. Prueba que la recta AT es una bisectriz del triángulo.*

Ejercicio 9 (2018.5). *Tenemos lámparas en una habitación, y* 5 *interruptores. Cada interruptor está conectado a una o varias lámparas, y cambia sus estados (encendida o apagada) al pulsarlo. Al pulsar dos interruptores distintos alguna lámpara tiene que cambiar de estado. Al pulsar los* 5 *interruptores todas las lámparas cambian de estado. Si todas las lámparas están inicialmente apagadas, demuestra que podemos pulsar* 3 *interruptores de forma que se enciendan al menos* 2 *lámparas.*

Ejercicio 10 (2020.5). *Llamamos a un par de números naturales* (a, b) *buenos si* $ab+1$ *es un cuadrado perfecto. Determinar los* n *para los que es posible dividir el conjunto* $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ *en* n *pares disjuntos de números buenos.*

Ejercicio 11 (2019.4). *Sea el círculo con diámetro* AB. C *y* D *son puntos en la circunferencia que están en lados opuestos respecto* AB. *La paralela a* AC *que pasa por* D *corta a* AB *en* E. *La paralela a* AD *que pasa por* C *corta a* AB *en* F. *La perpendicular a* AB *por* E *corta a* BC *en* X, *y la perpendicular a* AB *por* F *corta a* BD *en* Y. *Prueba que el perímetro del triángulo* AXY *es dos veces la longitud de* CD.